

① Update on module

Racines et Puissances Puissances Entières

Pour $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$,

base $\rightarrow a^n$ $\uparrow$ exposant
 $a^n = 1 \cdot \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ fois}}$ 'multiplication répétée'

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ 'division répétée'

Rem. $a^0 = 1$.

$3^2 = 9$; $3^{-2} = \frac{1}{9}$; $(-1)^4 = 1$; $5^0 = 1$
 $\left(\frac{-2}{3}\right)^5 = \frac{(-2)^5}{3^5} = \frac{-32}{243}$; $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3} = 4^3 = 64$

Prop • $\underbrace{(ab)^n}_{\text{même exposant}} = a^n b^n$ • $\underbrace{a^n a^m}_{\text{même base}} = a^{n+m}$

• $(a^1)^m = a^m$ • $\frac{a^n}{a^m} = a^n a^{-m} = a^{n-m}$

Racines

Pour $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on écrit
 $x = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

Si $x^n = a$ et $\text{sgn}(x) = \text{sgn}(a)$.

Rem. Si $n=2$, $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$.

Ex $\sqrt[3]{8} = 2$; $\sqrt[3]{-8} = -2$

$(\sqrt[n]{a})^n = (a^{\frac{1}{n}})^n = a^1 = a$

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{ab}$

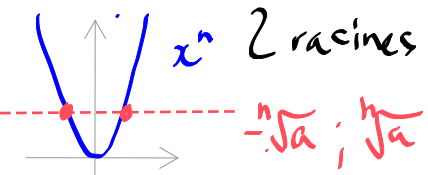
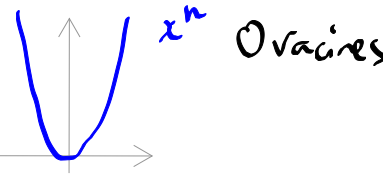
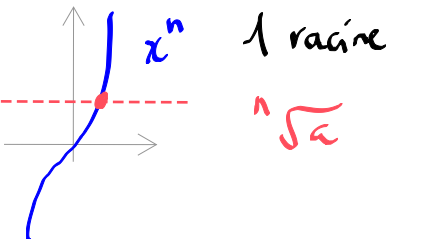
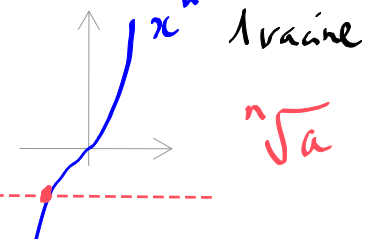
En générale, si $x^n = a$, x est dit une **racine (réelle) n -ième** de a .

Question: Combien de racines y a-t-il?

Quel lien avec $\sqrt[n]{a}$?

La réponse dépend

- du signe de a
- la parité de n .

	$a > 0$	$a < 0$
n pair	 x^n 2 racines $-\sqrt[n]{a}; \sqrt[n]{a}$	 x^n 0 racines
n impair	 x^n 1 racine $\sqrt[n]{a}$	 x^n 1 racine $\sqrt[n]{a}$

Soit $f(x) = \sqrt[n]{x}$,

- Si n est pair,
- Si n est impaire,

domaine de définition de f
 $D_f = \mathbb{R}_+$
 $D_f = \mathbb{R}$

Rem Deux expressions $f(x)$ et $g(x)$ sont égales si
 $D_f = D_g$ et $f(x) = g(x) \forall x \in D_f$

Ainsi, $(\sqrt{x})^2 \neq x$, en termes d'expression

Puissances Rationnelles

Pour $a \in \mathbb{R}_+$ et $m, n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$ on définit
 $a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$

Toutes les prop. restent vrais!

Ex. $\sqrt[3]{a} \sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{3}} a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}} = a^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{a^5}$

$\sqrt{3\sqrt{3}} = (3 \cdot 3^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = (3^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{3^3}$

$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$

Rem. $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a| & \text{si } n \text{ pair} \\ a & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$

$\Rightarrow \sqrt[3]{2a^3b^6} = a \sqrt{2b^2}$

$\Rightarrow \sqrt[2]{2a^2b} = |a| \sqrt{2b}$

Équation Irrationnelles

⚠ $u = v \not\Rightarrow u^2 = v^2$

La vraie équivalence est

$u = v \Leftrightarrow u^2 = v^2$ et $\text{sgn}(u) = \text{sgn}(v)$

Exemple. Résoudre $\sqrt{x^2 - 3x + 6} = 4x - 6$

$D_{\text{def}} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 6 > 0\} = \mathbb{R}$

$\Delta = 9 - 4 \cdot 6 < 0$

On aimerait

$\sqrt{x^2 - 3x + 6} = 4x - 6$

↕ seulement si $4x - 6 \geq 0$!

$x^2 - 3x + 6 = (4x - 6)^2$

D'ailleurs, si $4x - 6 < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, \frac{3}{2}[$

x ne sera pas solution car $\sqrt{x^2 - 3x + 6}$.

↳ Domaine de positivité!

Si $x \in [\frac{3}{2}; +\infty[\cap D_{\text{def}}$

$\sqrt{x^2 - 3x + 6} = 4x - 6 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 6 = (4x - 6)^2$

$x^2 - 3x + 6 = 16x^2 - 48x + 36$;

$15x^2 - 45x + 30 = 0$; $15(x^2 - 3x + 2) = 0$

$15(x - 1)(x - 2) = 0$; zéros: $\{1; 2\}$

$S = \{2\}$

pas dans D_{pos} !

Méthode générale pour $\sqrt{f(x)} = g(x)$

domaine de définition de f

- Trouver $D_{\text{def}} = D_f \cap D_g \cap \{x \mid f(x) \geq 0\}$

- Trouver $D_{\text{pos}} = \{x \mid g(x) \geq 0\}$

- Sur $D_{\text{def}} \cap D_{\text{pos}}$,

$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)^2$

$S = D_{\text{def}} \cap D_{\text{pos}} \cap \{x \mid f(x) = g(x)^2\}$

Inéquations irrationelles

Similairement,

$$\Delta \quad u^2 \leq v^2 \Leftrightarrow u \leq v$$

Mais si $u \geq 0$ et $v \geq 0$, l'équivalence est vraie

Exemple Résoudre $\sqrt{6-x} \leq 2x+3$

$$D_{\text{def}} = \{x \mid 6-x \geq 0\} =]-\infty; 6]$$

Rem si $2x+3 < 0$, x ne sera jamais une solution, car $\sqrt{6-x} \geq 0$.

$$\hookrightarrow 2x+3 \geq 0; \quad x \geq -\frac{3}{2}; \quad x \in [-\frac{3}{2}; +\infty[$$

Si $x \in [-\frac{3}{2}; +\infty[\cap D_{\text{def}}$:

$$\sqrt{6-x} \leq 2x+3 \Leftrightarrow 6-x \leq (2x+3)^2$$

$$6-x \leq 4x^2 + 12x + 9; \quad 4x^2 + 13x + 3 \geq 0$$

$$(4x+1)(x+3) \geq 0; \quad x \in]-\infty; -3] \cup [-\frac{1}{4}; +\infty[$$

$\uparrow$ au delta

$$S = [-\frac{1}{4}; 6] \leftarrow \cap D_{\text{pos}} \cap D_{\text{def}}$$

Méthode générale pour $\sqrt{f(x)} \leq g(x)$

- Trouver $D_{\text{def}} = \{x \mid f(x) \geq 0\}$

- Trouver $D_{\text{pos}} = \{x \mid g(x) \geq 0\}$

- Sur $D_{\text{def}} \cap D_{\text{pos}}$:

$$\sqrt{f(x)} \leq g(x) \Leftrightarrow f(x) \leq g(x)^2$$

$$S = D_{\text{def}} \cap D_{\text{pos}} \cap \{x \mid f(x) \leq g(x)^2\}$$

Exemple Résoudre $\sqrt{-x^2-x+6} \geq x+1$

$$D_{\text{def}} = \{x \mid \underbrace{-x^2-x+6}_{-(x+3)(x-2)} \geq 0\} = [-3; 2]$$

Rem Si $x+1 < 0$, x ne sera jamais une solution

car $\sqrt{-x^2-x+6} \geq 0$, (si $x \in D_{\text{def}}$)

$$x+1 < 0; \quad x \in]-\infty; -1[$$

$$S_1 =]-\infty; -1[\cap D_{\text{def}} = [-3; -1[$$

$S_1: \underline{x+1 \geq 0}$ e/ $x \in D_{\text{def}}$,

$$\sqrt{-x^2-x+6} \geq x+1 \Leftrightarrow -x^2-x+6 \geq (x+1)^2$$

$$-x^2-x+6 \geq x^2+2x+1;$$

$$2x^2+3x-5 \leq 0; (2x+5)(x-1) \leq 0$$

$$\hookrightarrow x \in \left[-\frac{5}{2}; 1\right] \quad \uparrow \text{ou delta}$$

$$S_2 = \left[-\frac{5}{2}; 1\right] \cap D_{\text{def}} \cap \underline{[-1; +\infty[}$$
$$= [-1; 1]$$

$$S = S_1 \cup S_2 = [-3; -1[\cup [-1; 1]$$
$$= [-3; 1]$$